TEMA 5.- PROBLEMAS GEODÉSICOS PRINCIPALES

EJERCICIO 5.1

$$\varepsilon^o = A + B + C - 180^o = 184^o - 180^o \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon^o = 4^o}$$

$$\varepsilon^r = \varepsilon^o \frac{\pi}{180^o} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon^r = 0{,}0698}$$

$$\varepsilon'' = \varepsilon^o \cdot 3600 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon'' = 14.400''}$$

$$T = \varepsilon^o \frac{\pi}{180^o} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 0{,}0689\ u^2}$$

$$S = \frac{720^o}{\varepsilon^o} T = \frac{720^o}{\varepsilon^o} \varepsilon^o \frac{\pi}{180^o} \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = 4\pi\ u^2}$$

EJERCICIO 5.2

$$A' = 80^o - \frac{\varepsilon^o}{3} = 80^o - \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A' = 78{,}6^o}$$

$$B' = 48^o - \frac{\varepsilon^o}{3} = 48^o - \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{B' = 46{,}6^o}$$

$$C' = 56^o - \frac{\varepsilon^o}{3} = 56^o - \frac{4}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C' = 54{,}6^o}$$

EJERCICIO 5.3

Cálculo de las coordenadas de A y Z_{AP}.

1.- Mediante los parámetros ***a*** y ***f*** del elipsoide *WGS84*, se calcularán el valor de la *primera* y *segunda excentricidad* del elipsoide ***e*** y ***e'*** (2-6), N_P (2-13), ρ_P (2-20) y $R_{Z(PA)}$ (2-33):

(2-6) $$e^2 = f(2-f) = 0{,}0066943800 \qquad e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2} = \frac{f(2-f)}{1-f(2-f)} = 0{,}0067394967$$

(2-13) $$N_P = \frac{a}{W_P} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi_P}} = \frac{a}{\sqrt{1+f(f-2)sen^2\varphi_P}}$$ $$\begin{cases} W_P = 0{,}9987869746\ m \\ W_P^3 = 0{,}9963653363\ m \\ N_P = 6.385.883{,}239\ m \end{cases}$$

(2-20) $$\rho_P = \frac{a\left(1-e^2\right)}{W_P^3} = \frac{a\left(f^2-2f+1\right)}{W_P^3}$$ $$\rho_P = 6.358.550{,}520\ \ m$$

(2-33) $$R_{Z(PA)} = \frac{N_P\ \rho_P}{\rho_P\ sen^2 Z_{PA}\ + N_P\ cos^2 Z_{PA}}$$ $$R_{z(PA)} = 6.372.187{,}570\ \ m$$

2.- Con estos valores, más el acimut $\boldsymbol{Z_{PA}}$, la distancia $\boldsymbol{s}$ y la latitud $\boldsymbol{\varphi_P}$, se determinan las componentes del vector $\vec{PA}_{(t)}$ referidas al *sistema de las direcciones principales* de **P**:

(5-14) $$\vec{PA}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s\cdot cos\,Z_{PA} - \dfrac{s^3\ cos\,Z_{PA}}{6R_{Z(PA)}\,\rho_P} + \cdots \\ s\cdot senZ_{PA} - \dfrac{s^3 senZ_{PA}}{6R_{Z(PA)}\,N_P} + \cdots \\ \dfrac{s^2}{2R_{Z(PA)}} - \dfrac{s^3}{4R_{Z(PA)}N_P}\,e'^2\ sen2\varphi_P\ cos\,Z_{PA} + \cdots \end{bmatrix}$$ $$\vec{PA}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.354{,}975 \\ 35.354{,}977 \\ 196{,}161 \end{bmatrix}$$

3.- Se calculan las coordenadas cartesianas de **P**, a partir de ($\boldsymbol{\varphi_P}$, $\boldsymbol{\lambda_P}$) y $h = 0$, con (5-17):

(5-17) $$P = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_P\ cos\,\varphi_P\ cos\,\lambda_P \\ N_P\ cos\,\varphi_P\ sen\lambda_P \\ N_P\left(1-e^2\right)sen\varphi_P \end{pmatrix}$$ $$P = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.080.586{,}104 \\ -444.493{,}688 \\ 3.817.393{,}160 \end{pmatrix}$$

4.- Se calculan las coordenadas cartesianas del punto **A** mediante la expresión (4-10):

(4-10) $$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -sen\varphi_P\ cos\,\lambda_P & -sen\lambda_P & -cos\,\varphi_P\ cos\,\lambda_P \\ -sen\varphi_P\ sen\lambda_P & cos\,\lambda_P & -cos\,\varphi_P\ sen\lambda_P \\ cos\,\varphi_P & 0 & -sen\varphi_P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.062.315{,}238 \\ -407.405{,}167 \\ 3.845.510{,}846 \end{pmatrix}$$

5.- Se obtienen las *coordenadas geodésicas* de **A** ($\boldsymbol{\varphi_A}$, $\boldsymbol{\lambda_A}$), mediante las expresiones (5-18), a partir de las recién calculadas coordenadas cartesianas ($\boldsymbol{X_A}$, $\boldsymbol{Y_A}$, $\boldsymbol{Z_A}$):

$$\varphi_A = arctan\frac{Z_A}{\left(1-e^2\right)\sqrt{X_A^2+Y_A^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\varphi_A = 37^o\ 19'\ 04'',45152\ N}$$

$$\lambda_A = arctan\frac{Y_A}{X_A} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\lambda_A = 004^o\ 36'\ 04'',08693\ W}$$

6.- Se halla el *acimut* $\boldsymbol{Z_A}$ de la geodésica que parte de **P**, en el punto **A**, con (5-19) y (5-20):

(5-19) $$senZ_A = \frac{N_P\ cos\,\varphi_P senZ_{PA}}{N_A\ cos\,\varphi_A} = 0{,}7100738851 \qquad Z_A = 45^o\ 14'\ 27'',338$$

(5-20) $$senZ_A > 0 \quad \rightarrow \quad Z_{PA} < 90^o \quad \rightarrow \quad Z_A = Z_A \qquad Z_A = 45^o\ 14'\ 27'',338$$

7.- Se calcula el acimut inverso $\boldsymbol{Z_{AP}}$, mediante la sencilla operación:

(5-21) $$Z_{AP} = Z_A \pm 180^o \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{AP} = 225^o\ 14'\ 27'',338}$$

8.- Es posible hallar la *convergencia de meridianos* $\boldsymbol{\Delta Z}$, mediante la expresión:

(5-22) $$\Delta Z = Z_A - Z_{PA} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta Z = 0^o\ 14'\ 27'',338}$$

Cálculo de las coordenadas de B y Z_{BP}.

1.- Los valores de la *primera* y *segunda excentricidad* del elipsoide ***e*** y ***e'*** serán los mismos que en el caso anterior:

(2-6) $$e^2 = 0{,}0066943800 \qquad e'^2 = 0{,}0067394967$$

Los valores de $\boldsymbol{N_P}$ (2-13), $\boldsymbol{\rho_P}$ (2-20) y $\boldsymbol{R_{Z(PB)}}$ (2-33), se obtienen de igual forma que en el caso anterior:

(2-13) $$N_P = \frac{a}{W_P} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi_P}} = \frac{a}{\sqrt{1+f(f-2)sen^2\varphi_P}} \qquad \begin{cases} W_P = 0{,}9987869746\ m \\ W_P^3 = 0{,}9963653363\ m \\ N_P = 6.385.883{,}239\ m \end{cases}$$

(2-20) $$\rho_P = \frac{a\left(1-e^2\right)}{W_P^3} = \frac{a\left(f^2-2f+1\right)}{W_P^3} \qquad \rho_P = 6.358.550{,}520\ \ m$$

(2-33) $$R_{Z(PB)} = \frac{N_P\ \rho_P}{\rho_P\ sen^2 Z_{PB}\ + N_P\ cos^2 Z_{PB}} \qquad R_{z(PB)} = 6.372.187{,}570\ \ m$$

2.- Con estos valores, más el acimut $\boldsymbol{Z_{PB}}$, la distancia ***s*** y la latitud $\boldsymbol{\varphi_P}$, se determinan las componentes del vector $\vec{PB}_{(t)}$ referidas al *sistema de las direcciones principales* de **P**:

$$(5\text{-}14)\quad \vec{PB}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot \cos Z_{PB} - \dfrac{s^3 \cos Z_{PB}}{6R_{Z(PB)}\,\rho_P} + \cdots \\ s \cdot senZ_{PB} - \dfrac{s^3 senZ_{PB}}{6R_{Z(PB)}\,N_P} + \cdots \\ \dfrac{s^2}{2R_{Z(PB)}} - \dfrac{s^3}{4R_{Z(PB)}N_P}\, e'^2\, sen2\varphi_P \cos Z_{PB} + \cdots \end{bmatrix} \qquad \vec{PB}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35.354,975 \\ 35.354,977 \\ 196,168 \end{bmatrix}$$

3.- Se calculan las coordenadas cartesianas de **P**, a partir de (***φ_P***, ***λ_P***) y $h = 0$, con (5-17), que ya se han obtenido en el caso anterior:

$$(5\text{-}17)\qquad P = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.080.586,104 \\ -444.493,688 \\ 3.817.393,160 \end{pmatrix}$$

4.- Se calculan las coordenadas cartesianas del punto **B** mediante la expresión (4-10):

$$(4\text{-}10)\qquad \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -sen\varphi_P \cos\lambda_P & -sen\lambda_P & -\cos\varphi_P \cos\lambda_P \\ -sen\varphi_P\, sen\lambda_P & \cos\lambda_P & -\cos\varphi_P\, sen\lambda_P \\ \cos\varphi_P & 0 & -sen\varphi_P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.104.707,612 \\ -411.114,019 \\ 3.789.039,364 \end{pmatrix}$$

5.- Se obtienen las *coordenadas geodésicas* de **B** (***φ_B***, ***λ_B***), mediante las expresiones (5-18), a partir de las recién calculadas coordenadas cartesianas (***X_B***, ***Y_B***, ***Z_B***):

$$\varphi_B = \arctan \frac{Z_A}{\left(1-e^2\right)\sqrt{X_A^2 + Y_A^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_B = 36^o\ 40'\ 50'',70175\ \ N}$$

$$\lambda_B = \arctan \frac{Y_A}{X_A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_B = 004^o\ 36'\ 16'',01838\ \ W}$$

6.- Se halla el *acimut* ***Z_B*** de la geodésica que parte de **P**, en el punto **B**, con (5-19) y (5-20):

$$(5\text{-}19)\qquad senZ_B = \frac{N_P \cos\varphi_P senZ_{PB}}{N_B \cos\varphi_B} = 0,7041737515 \qquad Z_B = 44^o\ 45'\ 46'',193$$

$$(5\text{-}20)\qquad senZ_B > 0 \quad \rightarrow \quad Z_{PB} > 90^o \quad \rightarrow \quad Z_B = 180^o - Z_B \qquad Z_B = 135^o\ 14'\ 13'',807$$

7.- Se calcula el acimut inverso ***Z_{BP}***, mediante la sencilla operación:

$$(5\text{-}21)\qquad Z_{BP} = Z_B \pm 180^o \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{BP} = 315^o\ 14'\ 13'',807}$$

8.- Es posible hallar la *convergencia de meridianos* ***ΔZ***, mediante la expresión:

(5-22) $\Delta Z = Z_B - Z_{PB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta Z = 0^o\, 14'\, 13'',807}$

Cálculo de las coordenadas de C y Z_{CP}.

1.- Los valores de la *primera* y *segunda excentricidad* del elipsoide ***e*** y ***e'*** serán los mismos:

(2-6) $e^2 = 0{,}0066943800 \qquad e'^2 = 0{,}0067394967$

Los valores de N_P (2-13), y ρ_P (2-20) son los mismos que en los dos casos anteriores:

(2-13)
$$\begin{cases} W_P = 0{,}9987869746\ m \\ W_P^3 = 0{,}9963653363\ m \\ N_P = 6.385.883{,}239\ m \end{cases}$$

(2-20) $\rho_P = 6.358.550{,}520\ \ m$

El valor de $R_{Z(PC)}$ (2-33), se obtiene de forma similar que en los casos anteriores, y ha de coincidir con el del caso anterior:

(2-33)
$$R_{Z(PC)} = \frac{N_P\ \rho_P}{\rho_P\ sen^2 Z_{PC}\ + N_P\ cos^2 Z_{PC}} \qquad R_{z(PC)} = 6.372.187{,}570\ \ m$$

2.- Con estos valores, más el acimut Z_{PC}, la distancia s y la latitud φ_P, se determinan las componentes del vector $\vec{PC}_{(t)}$ referidas al *sistema de las direcciones principales* de **P**:

(5-14)
$$\vec{PC}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot cos\, Z_{PC} - \dfrac{s^3\ cos\, Z_{PC}}{6R_{Z(PC)}\,\rho_P} + \cdots \\ s \cdot senZ_{PC} - \dfrac{s^3\, senZ_{PC}}{6R_{Z(PC)}\,N_P} + \cdots \\ \dfrac{s^2}{2R_{Z(PC)}} - \dfrac{s^3}{4R_{Z(PC)}N_P}\, e'^2\ sen2\varphi_P\ cos\, Z_{PC} + \cdots \end{bmatrix} \qquad \vec{PC}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\ 35.354{,}975 \\ -\ 35.354{,}977 \\ 196{,}168 \end{bmatrix}$$

3.- Las coordenadas cartesianas de **P** se calculan a partir de (φ_P, λ_P) y $h = 0$, con (5-17), como en los casos anteriores:

(5-17)
$$P = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.080.586{,}104 \\ -\ 444.493{,}688 \\ 3.817.393{,}160 \end{pmatrix}$$

4.- Se calculan las coordenadas cartesianas del punto **C** mediante la expresión (4-10):

(4-10) $$\begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -sen\varphi_P \cos\lambda_P & -sen\lambda_P & -\cos\varphi_P \cos\lambda_P \\ -sen\varphi_P \, sen\lambda_P & \cos\lambda_P & -\cos\varphi_P \, sen\lambda_P \\ \cos\varphi_P & 0 & -sen\varphi_P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.098.544,833 \\ -481.554,901 \\ 3.789.039,364 \end{pmatrix}$$

5.- Se obtienen las *coordenadas geodésicas* de **C** (φ_C, λ_C), mediante las expresiones (5-18), a partir de las recién calculadas coordenadas cartesianas (X_C, Y_C, Z_C):

$$\varphi_C = arctan \frac{Z_C}{\left(1-e^2\right)\sqrt{X_C^2 + Y_C^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_C = 36^o\ 40'\ 50''_{,}70175\ \ N}$$

$$\lambda_C = arctan \frac{Y_C}{X_C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_C = 005^o\ 23'\ 43''_{,}98162\ \ W}$$

6.- Se halla el *acimut* Z_C de la geodésica que parte de **P**, en el punto **C**, con (5-19) y (5-20):

(5-19) $$senZ_C = \frac{N_P \cos\varphi_P senZ_{PC}}{N_C \cos\varphi_C} = -0,7041737515 \qquad Z_C = -44^o\ 45'\ 46'',193$$

(5-20) $$senZ_C < 0 \quad \rightarrow \quad Z_{PC} < 270^o \quad \rightarrow \quad Z_C = 180^o - Z_C \qquad Z_C = 224^o\ 45'\ 46'',193$$

7.- Se calcula el acimut inverso Z_{CP}, mediante la sencilla operación:

(5-21) $$Z_{CP} = Z_C \pm 180^o \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{CP} = 44^o\ 45'\ 46''_{,}193}$$

8.- Es posible hallar la *convergencia de meridianos* ΔZ, mediante la expresión:

(5-22) $$\Delta Z = Z_C - Z_{PC} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta Z = -0^o\ 14'\ 13''_{,}807}$$

<u>Cálculo de las coordenadas de D y Z_{DP}.</u>

1.- Los valores de la *primera* y *segunda excentricidad* del elipsoide ***e*** y ***e'*** serán los mismos que en los casos anteriores:

(2-6) $$e^2 = 0,0066943800 \qquad e'^2 = 0,0067394967$$

Los valores de N_P (2-13), y ρ_P (2-20) también son los mismos que en los mismos que en casos anteriores:

(2-13) $$\begin{cases} W_P = 0{,}9987869746 \ m \\ W_P^3 = 0{,}9963653363 \ m \\ N_P = 6.385.883{,}239 \ m \end{cases}$$

(2-20) $$\rho_P = 6.358.550{,}520 \ \ m$$

El valor de $\boldsymbol{R_{Z(PD)}}$ (2-33), se obtiene de forma similar que en los casos anteriores, y ha de coincidir con ellos:

(2-33) $$R_{Z(PD)} = \frac{N_P \ \rho_P}{\rho_P \ sen^2 Z_{PD} \ + N_P \ cos^2 Z_{PD}} \qquad\qquad R_{z(PD)} = 6.372.187{,}570 \ \ m$$

2.- Con estos valores, más el acimut $\boldsymbol{Z_{PD}}$, la distancia $\boldsymbol{s}$ y la latitud $\boldsymbol{\varphi_P}$, se determinan las componentes del vector $\vec{PD}_{(t)}$ referidas al *sistema de las direcciones principales* de **P**:

(5-14) $$\vec{PD}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot cos\, Z_{PD} - \dfrac{s^3 \ cos\, Z_{PD}}{6 R_{Z(PD)} \, \rho_P} + \cdots \\ s \cdot sen Z_{PD} - \dfrac{s^3 \, sen Z_{PD}}{6 R_{Z(PD)} \, N_P} + \cdots \\ \dfrac{s^2}{2 R_{Z(PD)}} - \dfrac{s^3}{4 R_{Z(PD)} N_P} e'^2 \ sen 2\varphi_P \ cos\, Z_{PD} + \cdots \end{bmatrix} \qquad \vec{PD}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35.354{,}975 \\ -35.354{,}977 \\ 196{,}168 \end{bmatrix}$$

3.- Las coordenadas cartesianas de **P** se calculan a partir de ($\boldsymbol{\varphi_P}$, $\boldsymbol{\lambda_P}$) y $h = 0$, con (5-17), como en los casos anteriores:

(5-17) $$P = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.080.586{,}104 \\ -444.493{,}688 \\ 3.817.393{,}160 \end{pmatrix}$$

4.- Se calculan las coordenadas cartesianas del punto **D** mediante la expresión (4-10):

(4-10) $$\begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -sen\varphi_P \ cos\,\lambda_P & -sen\lambda_P & -cos\,\varphi_P \ cos\,\lambda_P \\ -sen\varphi_P \ sen\lambda_P & cos\,\lambda_P & -cos\,\varphi_P \ sen\lambda_P \\ cos\,\varphi_P & 0 & -sen\varphi_P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.056.152{,}460 \\ -477.846{,}049 \\ 3.845.510{,}846 \end{pmatrix}$$

5.- Se obtienen las *coordenadas geodésicas* de **D** ($\boldsymbol{\varphi_D}$, $\boldsymbol{\lambda_D}$), mediante las expresiones (5-18), a partir de las recién calculadas coordenadas cartesianas ($\boldsymbol{X_D}$, $\boldsymbol{Y_D}$, $\boldsymbol{Z_D}$):

$$\varphi_D = arctan \frac{Z_D}{\left(1 - e^2\right)\sqrt{X_D^2 + Y_D^2}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\varphi_D = 37^o \ 19' \ 04'' ,45152 \ \ N}$$

$$\lambda_D = arctan\frac{Y_D}{X_D} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\lambda_D = 005^o\ 23'\ 55''_,91307\ \ W}$$

6.- Se halla el *acimut* ***Z_D*** de la geodésica que parte de **P**, en el punto **D**, con (5-19) y (5-20):

(5-19) $$senZ_D = \frac{N_P\ cos\,\varphi_P senZ_{PD}}{N_D\ cos\,\varphi_D} = \text{-}0{,}7100738851 \qquad Z_D = -45^o 14'\ 27''{,}338$$

(5-20) $$senZ_D < 0 \quad \rightarrow \quad Z_{PD} > 270^o \quad \rightarrow \quad Z_D = 360^o + Z_D \qquad Z_D = 314^o\ 45'\ 32''{,}662$$

7.- Se calcula el acimut inverso $\boldsymbol{Z_{CD}}$, mediante la sencilla operación:

(5-21) $$Z_{DP} = Z_D \pm 180^o \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Z_{DP} = 134^o\ 45'\ 32''_,662}$$

8.- Es posible hallar la *convergencia de meridianos* ***ΔZ***, mediante la expresión:

(5-22) $$\Delta Z = Z_D - Z_{PD} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta Z = -0^o\ 14'\ 27''_,338}$$

EJERCICIO 5.4

Cálculo de las coordenadas de A y Z_{AP}.

1.- Se calculan las coordenadas ortogonales $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ aplicando (5-31) y (5-32). Para ello, antes se deben calcular: la *primera excentricidad* ***e*** (2-6), $\boldsymbol{N_P}$ (2-13) y $\boldsymbol{\rho_P}$ (2-20) para la latitud del punto **P**:

(2-6) $$e^2 = f(2-f) = 0{,}0066943800$$

(2-13) $$N_P = \frac{a}{W_P} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi_P}} = \frac{a}{\sqrt{1+f(f-2)sen^2\varphi_P}} \qquad \begin{cases} W_P = 0{,}9987869746\ m \\ W_P^3 = 0{,}9963653363\ m \\ N_P = 6.385.883{,}239\ m \end{cases}$$

(2-20) $$\rho_P = \frac{a\left(1-e^2\right)}{W_P^3} = \frac{a\left(f^2-2f+1\right)}{W_P^3} \qquad \rho_P = 6.358.550{,}520\ \ m$$

(5-31) $$y = s\,cos\,Z_{PA}\left(1+\frac{1}{3}\frac{s^2}{N_P\rho_P}sen^2 Z_{PA}\right) \qquad y = 35.355{,}702\ \ m$$

(5-32) $$x = s\ senZ_{PA}\left(1 - \frac{1}{6}\frac{s^2}{N_P\rho_P}\cos^2 Z_{PA}\right) \qquad x = 35.355,158\ \ m$$

2.- Una vez determinado el valor del arco ***y***, se calcula, en primera aproximación, la diferencia de latitudes que lo definen, en radianes, mediante la expresión (5-33):

(5-33) $$\Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_P}\left(1 - \frac{e^2}{8}\frac{y^2}{a^2}\cos 2\varphi_P\right) \qquad \Delta\varphi_y = 0{,}0055603398$$

con este valor se calcula ,también en primera aproximación, la latitud del punto **Q** mediante la (5-34), con la que se puede calcular la latitud media $\boldsymbol{\varphi_M}$ entre **P** y **Q** para obtener un valor exacto de $\boldsymbol{\Delta\varphi_y}$ con la expresión (5-36), para lo que es necesario determinar $\boldsymbol{\rho_M}$ con la (5-35):

(5-34) $$\varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0{,}6513321631 \qquad \varphi_M = \frac{\varphi_P + \varphi_Q}{2} = 0{,}6485519931$$

(5-35) $$\rho_M = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{W_M^3} \qquad \rho_M = 6.358.721{,}711\ m$$

(5-36) $$\Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_M}\left(1 - \frac{e^2}{8}\frac{y^2}{a^2}\cos 2\varphi_M\right) \qquad \Delta\varphi_y = 0{,}0055601901$$

3.- Cálculo del ángulo $\boldsymbol{\omega}$ con la expresión (5-37). Para ello se debe calcular, antes, un nuevo valor más exacto para la latitud del punto **Q** (5-34), y con ella, el valor $\boldsymbol{N_Q}$ con (2-13):

(5-34) $$\varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0{,}6513320134 = 37^o_{,}3185754270$$

(2-13) $$N_Q = \frac{a}{W_Q} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 sen^2\varphi_Q}} \qquad \begin{cases} W_Q = 0{,}9987690345\ m \\ W_Q^3 = 0{,}9963116473\ m \\ N_Q = 6.385.997{,}943\ m \end{cases}$$

(5-37) $$\omega = \frac{x^2}{2\ N_Q}\tan\varphi_Q \quad \Rightarrow \quad \omega = 74{,}607\ m$$

4.- Una vez determinado el valor de $\boldsymbol{\omega}$, se calcula, mediante (5-38), la diferencia de latitudes, en radianes, $\boldsymbol{\Delta\varphi_\omega}$ que define su arco. Para ello, antes se debe calcular $\boldsymbol{\rho_Q}$ mediante (2-20):

(2-20) $$\rho_Q = \frac{a\left(1 - e^2\right)}{W_Q^3} \qquad \rho_Q = 6.358.893{,}168\ \ m$$

(5-38) $$\Delta\varphi_\omega = \frac{\omega}{\rho_Q}\left(1 - \frac{e^2}{8}\frac{\omega^2}{a^2}\cos 2\varphi_Q\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi_\omega = 0{,}0000117326$$

5.- Cálculo de la *Latitud* de **A**, aplicando la expresión (5-39). El valor de $\Delta\varphi_y$, es positivo por estar el punto **A** más al Norte que **P**. El valor de $\Delta\varphi_\omega$ es siempre a restar:

(5-39) $$\varphi_A = \varphi_P + \Delta\varphi_y - \Delta\varphi_\omega = \varphi_Q - \Delta\varphi_\omega = 0{,}6513320134 - 0{,}0000117326 \qquad \boxed{\varphi_A = 37^o\ 19'\ 04'',45151\ \ N}$$

6.- Cálculo de la *Longitud* de **A** mediante la expresión (5-41), para lo cual es necesario calcular previamente N_A mediante (2-13):

(2-13) $$N_A = \frac{a}{W_A} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi_A}} \qquad N_A = 6.385.997{,}701\ m$$

(5-41) $$\Delta\lambda = arcsen\left[\frac{1}{cos\,\varphi_A}\, sen\,\frac{x}{N_A}\right] \qquad \Delta\lambda = 0{,}0069615030$$

$$\lambda_A = \lambda_P + \Delta\lambda = -0{,}0872664626\ +\ 0{,}0069615030 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\lambda_A = 004^o\ 36'\ 04'',08693\ \ W}$$

7.- Cálculo de la *convergencia de meridianos* mediante la expresión (5-42), para lo cual se deben calcular previamente las *latitudes reducidas* de **P** y **A** (2-53), así como el incremento de longitud $\Delta\lambda$' sobre la *Esfera de Jacobi* (5-13):

(2-53) $$cos\,\beta_P = \frac{1}{w_P} cos\,\varphi_P = 0{,}7996054518 \qquad \beta_P = 0{,}6441584012$$

(2-53) $$cos\,\beta_A = \frac{1}{w_A} cos\,\varphi_A = 0{,}7962642326 \qquad \beta_A = 0{,}6497017952$$

$$\beta_M = \frac{\beta_P + \beta_A}{2} = 0{,}6469300982 \qquad \frac{\Delta\beta}{2} = \frac{\beta_P - \beta_A}{2} = -0{,}0027716970$$

(5-13) $$d\lambda' = \frac{w}{\sqrt{1-e^2}} d\lambda = \frac{w_M}{\sqrt{1-e^2}} d\lambda \qquad d\lambda' = 0{,}0069763868$$

(5-42) $$tan\,\frac{\Delta Z}{2} = \frac{sen\beta_M}{cos\,\frac{\Delta\beta}{2}}\, tan\,\frac{\Delta\lambda'}{2} = 0{,}0021024891 \qquad \boxed{\Delta Z = 0^o\ 14'\ 27'',338}$$

8.- Cálculo del *acimut inverso* Z_{AP} mediante la expresión (5-43):

(5-43) $$Z_{AP} = \Delta Z + Z_{PA} + 180^o = 0^o\ 14'\ 27'',338 + 45^o + 180^o \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{Z_{AP} = 225^o\ 14'\ 27'',338}$$

<u>Cálculo de las coordenadas de B y Z_{BP}.</u>

Resumiendo los pasos indicados en el apartado anterior y aprovechando cálculos efectuados:

1.- Se calculan las coordenadas ortogonales ***x*** e ***y***:

(5-31) $$y = s\cos Z_{PB}\left(1+\frac{1}{3}\frac{s^2}{N_P\rho_P}sen^2 Z_{PB}\right) \qquad y = -35.355{,}702\ m$$

(5-32) $$x = s\ senZ_{PB}\left(1-\frac{1}{6}\frac{s^2}{N_P\rho_P}\cos^2 Z_{PB}\right) \qquad x = 35.355{,}158\ m$$

2.- se calcula, en primera aproximación, la diferencia de latitudes que definen el arco ***y***:

(5-33) $$\Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_P}\left(1-\frac{e^2}{8}\frac{y^2}{a^2}\cos 2\varphi_P\right) \qquad \Delta\varphi_y = -\,0{,}0055603398$$

(5-34) $$\varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0{,}6402114834 \qquad \varphi_M = \frac{\varphi_P+\varphi_Q}{2} = 0{,}6429916533$$

(5-35) $$\rho_M = \frac{a\left(1-e^2\right)}{W_M^3} \qquad \rho_M = 6.358.379{,}610\ m$$

(5-36) $$\Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_M}\left(1-\frac{e^2}{8}\frac{y^2}{a^2}\cos 2\varphi_M\right) \qquad \Delta\varphi_y = -\,0{,}0055604893$$

3.- Cálculo del ángulo ***ω*** :

(5-34) $$\varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0{,}6402113340 = 36^o_{,}6814074327$$

(2-13) $$N_Q = \frac{a}{W_Q} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi_Q}} \qquad \begin{cases} W_Q = 0{,}9988048582\ m \\ W_Q^3 = 0{,}9964188581\ m \\ N_Q = 6.385.768{,}899\ m \end{cases}$$

(5-37) $$\omega = \frac{x^2}{2\,N_Q}\tan\varphi_Q \quad \Rightarrow \quad \omega = 72{,}903\ m$$

4.- se calcula la diferencia de latitudes que define el arco ***ω***:

(2-20) $$\rho_Q = \frac{a\left(1-e^2\right)}{W_Q^3} \qquad \rho_Q = 6.358.208{,}976\ m$$

(5-38) $$\Delta\varphi_\omega = \frac{\omega}{\rho_Q}\left(1-\frac{e^2}{8}\frac{\omega^2}{a^2}\cos 2\varphi_Q\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi_\omega = 0{,}0000114659$$

5.- Cálculo de la *Latitud* de **B**. El valor de $\boldsymbol{\Delta\varphi_y}$, es negativo por estar **B** más al Sur que **P**. El valor de $\boldsymbol{\Delta\varphi_\omega}$ es siempre a restar:

(5-39) $\varphi_B = \varphi_P + \Delta\varphi_y - \Delta\varphi_\omega = \varphi_Q - \Delta\varphi_\omega = 0{,}6402113340 - 0{,}0000114659$ $\boxed{\varphi_B = 36^o\ 40'\ 50'' ,70174\ \ N}$

6.- Cálculo de la *Longitud* de **B**:

(2-13) $N_B = \dfrac{a}{W_B} = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2 \varphi_B}}$ $N_B = 6.385.768{,}664\ m$

(5-41) $\Delta\lambda = arcsen\left[\dfrac{1}{cos\,\varphi_B}\ sen\,\dfrac{x}{N_B}\right]$ $\Delta\lambda = 0{,}0069036577$

$\lambda_B = \lambda_P + \Delta\lambda = -0{,}0872664626\ +\ 0{,}0069036577$ $\Rightarrow$ $\boxed{\lambda_B = 004^o\ 36'\ 16'' ,01838\ \ W}$

7.- Cálculo de la *convergencia de meridianos*:

(2-53) $cos\,\beta_B = \dfrac{1}{w_B} cos\,\varphi_B = 0{,}8029359743$ $\beta_B = 0{,}6385917305$

$\beta_M = \dfrac{\beta_P + \beta_B}{2} = 0{,}6413750659$ $\dfrac{\Delta\beta}{2} = \dfrac{\beta_P - \beta_B}{2} = -0{,}0027833353$

(5-13) $d\lambda' = \dfrac{w}{\sqrt{1-e^2}} d\lambda = \dfrac{w_M}{\sqrt{1-e^2}} d\lambda$ $d\lambda' = 0{,}0069185419$

(5-42) $tan\,\dfrac{\Delta Z}{2} = \dfrac{sen\beta_M}{cos\,\dfrac{\Delta\beta}{2}} tan\,\dfrac{\Delta\lambda'}{2} = 0{,}0020696905$ $\boxed{\Delta Z = 0^o\ 14'\ 13'' ,807}$

8.- Cálculo del *acimut inverso* $\boldsymbol{Z_{BP}}$:

(5-43) $Z_{BP} = \Delta Z + Z_{PB} + 180^o = 0^o\ 14'\ 13'' ,807 + 135^o + 180^o$ $\Rightarrow$ $\boxed{Z_{BP} = 315^o\ 14'\ 13'' ,807}$

<u>Cálculo de las coordenadas de C y Z_{CP}.</u>

(5-31) $y = s\,cos\,Z_{PC}\left(1 + \dfrac{1}{3}\dfrac{s^2}{N_P\rho_P} sen^2 Z_{PC}\right)$ $y = -35.355{,}702\ \ m$

(5-32) $x = s\ senZ_{PC}\left(1 - \dfrac{1}{6}\dfrac{s^2}{N_P\rho_P} cos^2\ Z_{PC}\right)$ $x = -\ 35.355{,}158\ \ m$

2.- se calcula, en primera aproximación, la diferencia de latitudes que definen el arco ***y***:

(5-33) $\Delta\varphi_y = \dfrac{y}{\rho_P}\left(1 - \dfrac{e^2}{8}\dfrac{y^2}{a^2} cos\,2\varphi_P\right)$ $\Delta\varphi_y = -\ 0{,}0055603398$

(5-34) $\varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0{,}6402114834$ $\qquad \varphi_M = \dfrac{\varphi_P + \varphi_Q}{2} = 0{,}6429916533$

(5-35) $\rho_M = \dfrac{a\left(1-e^2\right)}{W_M^3}$ $\qquad \rho_M = 6.358.379{,}610\ m$

(5-36) $\Delta\varphi_y = \dfrac{y}{\rho_M}\left(1 - \dfrac{e^2}{8}\dfrac{y^2}{a^2}\cos 2\varphi_M\right)$ $\qquad \Delta\varphi_y = -\,0{,}0055604893$

3.- Cálculo del ángulo $\boldsymbol{\omega}$:

(5-34) $\varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0{,}6402113340 = 36^o{,}6814074327$

(2-13) $N_Q = \dfrac{a}{W_Q} = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi_Q}}$ $\qquad \begin{cases} W_Q = 0{,}9988048582\ m \\ W_Q^3 = 0{,}9964188581\ m \\ N_Q = 6.385.768{,}899\ m \end{cases}$

(5-37) $\omega = \dfrac{x^2}{2\,N_Q}\tan\varphi_Q \quad \Rightarrow \quad \omega = 72{,}903\ m$

4.- se calcula la diferencia de latitudes que define el arco $\boldsymbol{\omega}$:

(2-20) $\rho_Q = \dfrac{a\left(1-e^2\right)}{W_Q^3}$ $\qquad \rho_Q = 6.358.208{,}976\ \ m$

(5-38) $\Delta\varphi_\omega = \dfrac{\omega}{\rho_Q}\left(1 - \dfrac{e^2}{8}\dfrac{\omega^2}{a^2}\cos 2\varphi_Q\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi_\omega = 0{,}0000114659$

5.- Cálculo de la *Latitud* de **C**. El valor de $\boldsymbol{\Delta\varphi_y}$, es negativo por estar **C** más al Sur que **P**. El valor de $\boldsymbol{\Delta\varphi_\omega}$ es siempre a restar:

(5-39) $\varphi_C = \varphi_P + \Delta\varphi_y - \Delta\varphi_\omega = \varphi_Q - \Delta\varphi_\omega = 0{,}6402113340 - 0{,}0000114659$ $\qquad \boxed{\varphi_C = 36^o\ 40'\ 50''{,}70174\ \ N}$

6.- Cálculo de la *Longitud* de **C**:

(2-13) $N_C = \dfrac{a}{W_C} = \dfrac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2\varphi_C}}$ $\qquad N_C = 6.385.768{,}664\ m$

(5-41) $\Delta\lambda = arcsen\left[\dfrac{1}{\cos\varphi_C}\, sen\,\dfrac{x}{N_C}\right]$ $\qquad \Delta\lambda = -\,0{,}0069036577$

$\lambda_C = \lambda_P + \Delta\lambda = -0{,}0872664626\ -\ 0{,}0069036577 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_C = 005^o\ 23'\ 43''{,}98162\ \ W}$

7.- Cálculo de la *convergencia de meridianos*:

(2-53) $$\cos\beta_C = \frac{1}{w_C}\cos\varphi_C = 0{,}8029359743 \qquad \beta_C = 0{,}6385917305$$

$$\beta_M = \frac{\beta_P+\beta_C}{2} = 0{,}6413750659 \qquad \frac{\Delta\beta}{2} = \frac{\beta_P-\beta_C}{2} = -0{,}0027833353$$

(5-13) $$d\lambda' = \frac{w}{\sqrt{1-e^2}}d\lambda = \frac{w_M}{\sqrt{1-e^2}}d\lambda \qquad d\lambda' = -\,0{,}0069185419$$

(5-42) $$\tan\frac{\Delta Z}{2} = \frac{sen\beta_M}{\cos\frac{\Delta\beta}{2}}\tan\frac{\Delta\lambda'}{2} = -\,0{,}0020696905 \qquad \boxed{\Delta Z = -\,0^o\ 14'\ 13''_{,}807}$$

8.- Cálculo del *acimut inverso* Z_{CP}:

(5-43) $$Z_{CP} = \Delta Z + Z_{PC} + 180^o = -\,0^o\ 14'\ 13''_{,}807 + 225^o + 180^o \quad\Rightarrow\quad \boxed{Z_{CP} = 44^o\ 45'\ 46''_{,}193}$$

<u>Cálculo de las coordenadas de D y Z_{DP}.</u>

(5-31) $$y = s\cos Z_{PD}\left(1+\frac{1}{3}\frac{s^2}{N_P\rho_P}sen^2 Z_{PD}\right) \qquad y = 35.355{,}702\ \ m$$

(5-32) $$x = s\ senZ_{PD}\left(1-\frac{1}{6}\frac{s^2}{N_P\rho_P}\cos^2 Z_{PD}\right) \qquad x = -\,35.355{,}158\ \ m$$

2.- se calcula, en primera aproximación, la diferencia de latitudes que definen el arco ***y***:

(5-33) $$\Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_P}\left(1-\frac{e^2}{8}\frac{y^2}{a^2}\cos 2\varphi_P\right) \qquad \Delta\varphi_y = 0{,}0055603398$$

(5-34) $$\varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0{,}6513321631 \qquad \varphi_M = \frac{\varphi_P+\varphi_Q}{2} = 0{,}6485519931$$

(5-35) $$\rho_M = \frac{a\left(1-e^2\right)}{W_M^3} \qquad \rho_M = 6.358.721{,}711\ m$$

(5-36) $$\Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_M}\left(1-\frac{e^2}{8}\frac{y^2}{a^2}\cos 2\varphi_M\right) \qquad \Delta\varphi_y = 0{,}0055601901$$

3.- Cálculo del ángulo ***ω*** :

(5-34) $$\varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0{,}6513320134 = 37^o_{,}3185754270$$

(2-13) $$N_Q = \frac{a}{W_Q} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2 \varphi_Q}}$$ $$\begin{cases} W_Q = 0,9987690345\ m \\ W_Q^3 = 0,9963116473\ m \\ N_Q = 6.385.997,943\ m \end{cases}$$

(5-37) $$\omega = \frac{x^2}{2\ N_Q} \tan \varphi_Q \quad \Rightarrow \quad \omega = 74,607\ m$$

4.- se calcula la diferencia de latitudes que define el arco ***ω***:

(2-20) $$\rho_Q = \frac{a\left(1-e^2\right)}{W_Q^3} \qquad \rho_Q = 6.358.893,168\ \ m$$

(5-38) $$\Delta\varphi_\omega = \frac{\omega}{\rho_Q}\left(1 - \frac{e^2}{8}\frac{\omega^2}{a^2}\cos 2\varphi_Q\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi_\omega = 0,0000117326$$

5.- Cálculo de la *Latitud* de **D**. El valor de $\boldsymbol{\Delta\varphi_y}$, es negativo por estar **D** más al Norte que **P**. El valor de $\boldsymbol{\Delta\varphi_\omega}$ es siempre a restar:

(5-39) $$\varphi_D = \varphi_P + \Delta\varphi_y - \Delta\varphi_\omega = \varphi_Q - \Delta\varphi_\omega = 0,6513320134 - 0,0000117326 \qquad \boxed{\varphi_D = 37^o\ 19'\ 04''_{,}45151\ \ N}$$

6.- Cálculo de la *Longitud* de **D**:

(2-13) $$N_D = \frac{a}{W_D} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 sen^2 \varphi_D}} \qquad N_D = 6.385.997,701\ m$$

(5-41) $$\Delta\lambda = arcsen\left[\frac{1}{\cos\varphi_D} sen \frac{x}{N_D}\right] \qquad \Delta\lambda = -\ 0,0069615030$$

$$\lambda_D = \lambda_P + \Delta\lambda = -0,0872664626\ -\ 0,0069615030 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_D = 005^o\ 23'\ 55''_{,}91307\ \ W}$$

7.- Cálculo de la *convergencia de meridianos*:

(2-53) $$\cos\beta_D = \frac{1}{w_D}\cos\varphi_D = 0,7962642326 \qquad \beta_D = 0,6497017952$$

$$\beta_M = \frac{\beta_P + \beta_D}{2} = 0,6469300982 \qquad \frac{\Delta\beta}{2} = \frac{\beta_P - \beta_D}{2} = -0,0027716970$$

(5-13) $$d\lambda' = \frac{w}{\sqrt{1-e^2}} d\lambda = \frac{w_M}{\sqrt{1-e^2}} d\lambda \qquad d\lambda' = -\ 0,0069763868$$

(5-42) $$\tan\frac{\Delta Z}{2} = \frac{sen\beta_M}{\cos\frac{\Delta\beta}{2}} \tan\frac{\Delta\lambda'}{2} = -\ 0,0021024891 \qquad \boxed{\Delta Z = -\ 0^o\ 14'\ 27''_{,}338}$$

8.- Cálculo del *acimut inverso* $\boldsymbol{Z_{DP}}$:

(5-43) $Z_{DP} = \Delta Z + Z_{PD} + 180^o = -0^o\ 14'\ 27'' ,338 + 315^o + 180^o \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{DP} = 134^o\ 45'\ 32'' ,662}$

EJERCICIO 5.5

En preparación